

LISTA 9 - Całka podwójna i potrójna cz. I

1. Obliczyć całkę podwójną w podanym prostokącie P

$$(a) \iint_P (2x - 3y^2) dx dy, \quad P = [-1, 1] \times [0, 2], \quad (c) \iint_P xy(x + y) dx dy, \quad P = [0, 2] \times [0, 2],$$

$$(b) \iint_P 4xy dx dy, \quad P = [0, 1] \times [1, 2], \quad (d) \iint_P \frac{dx dy}{(x+y+1)^2}, \quad P = [0, 1] \times [1, 2].$$

2. Obliczyć całkę potrójną po podanym prostopadłościanie P

$$(a) \iiint_P (x + y + z)^2 dx dy dz, \quad P = [-2, -1] \times [0, 2] \times [-1, 1],$$

$$(b) \iiint_P (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz, \quad P = [0, 1] \times [1, 3] \times [0, 1],$$

$$(c) \iiint_P x y z e^{x+y+z} dx dy dz, \quad P = [0, 1]^3.$$

3. Obliczyć całkę podwójną w obszarze D ograniczonym podanymi krzywymi

$$(a) \iint_D (x + y + 1)^2 dx dy, \quad x = 0, x + y = 1, x - y = 1,$$

$$(b) \iint_D x dx dy, \quad x = 2, x = 6, x - 2y + 2 = 0, x - 2y + 4 = 0,$$

$$(c) \iint_D 2xy dx dy, \quad y = x^2, y = 2 + |x|,$$

$$(d) \iint_D dx dy, \quad y = \frac{2}{x}, x > 0, y = 2x, y = \frac{1}{2}x,$$

$$(e) \iint_D dx dy, \quad y = e^x, y = \ln x, x + y = 1, x = 2.$$

4. Zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej

$$(a) \int_0^2 dx \int_0^x f(x, y) dy, \quad (c) \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy,$$

$$(b) \int_0^1 dy \int_{y-1}^{y^2} f(x, y) dx, \quad (d) \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy.$$

5. Obliczyć całkę $\iiint_V z dx dy dz$, jeśli

$$(a) V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, x - y \leq z \leq x + y\},$$

$$(b) V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq y\},$$

$$(c) V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq x \leq y, z \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\},$$

$$(d) V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 0, x \leq y \leq 0, 0 \leq z \leq 1\}.$$

6. Obliczyć całkę $\iiint_V 2z dx dy dz$, jeśli $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, \sqrt{2-x} \leq z \leq \sqrt{6+y}\}$

$$(a) D \text{ jest kwadratem o wierzchołkach } (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1),$$

$$(b) D \text{ jest trójkątem o wierzchołkach } (0, 0), (0, 2), (2, 0),$$

$$(c) D \text{ jest kołem o środku } (0, 0) \text{ i promieniu } 1,$$

$$(d) D \text{ jest kołem o środku } (0, 1) \text{ i promieniu } 1.$$

7. Obliczyć całkę po obszarze V ograniczonym danymi powierzchniami

$$(a) \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz, \quad x = 0, y = 0, z = 0, y = 2, x + z = 2,$$

$$(b) \iiint_V dx dy dz, \quad x = 0, y = 0, z = 0, 2x + y = 4, z = 4 - x^2,$$

$$(c) \iiint_V dx dy dz, \quad x = 0, z = 0, 2y = x^2, z = 4 - y^2,$$

$$(d) \iiint_V dx dy dz, \quad x = 0, y = 0, z = 0, 2x + 2y + z = 2.$$